

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Etude sur les groupes et les monoïdes finis</b>	<b>5</b>
1.1 Relation binaire, n-aire . . . . .	5
1.2 Semi-groupe . . . . .	7
1.3 Monoïde . . . . .	8
1.4 Homomorphisme . . . . .	9
1.5 Relation de congruence . . . . .	10
1.6 Groupes . . . . .	11
1.7 Groupe de permutations . . . . .	13
1.8 Action d'un groupe sur un ensemble . . . . .	13
<b>2 Semi-groupe de transformation et semi-automate</b>	<b>14</b>
2.1 Semi-groupe de transformation . . . . .	14
2.1.1 Monoïde de transformation . . . . .	18
2.1.2 Semi-groupe de transformation complete . . . . .	19
2.1.3 Groupe de transformation . . . . .	20
2.2 Automate et semi automate . . . . .	21
2.2.1 Automate . . . . .	21
2.2.2 Semi-automate . . . . .	22

<b>3</b>	<b>La relation entre semi-groupe et semi-automate</b>	<b>25</b>
3.1	Le semi-groupe d'un semi-automate . . . . .	25
3.2	Le monoïde du semi-automate . . . . .	27
3.3	Le semi-automate du semi-groupe de transformation . . . . .	28

# Introduction

On étudie dans ce mémoire la relation entre le semi-groupe de transformation et le semi-automate, le semi-automate est un triple  $(Q, \Sigma, F)$  tels que  $Q$  et  $\Sigma$  sont des ensembles finis,  $Q$  est l'ensemble d'états,  $\Sigma$  est l'alphabet du semi-automate et  $F$  est une fonction définie de  $Q \times \Sigma$  dans  $Q$  et représentée par un tableau ou un graphe, le semi-groupe est un ensemble muni d'une opération binaire interne et associative. Cette relation est importante pour étudier la décomposition d'un semi-automate par le produit en cascade et la décomposition d'un semi-groupe de transformation par le produit en couronne et la relation entre eux, pour plus information [Hol82] et [Eil76].

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on donne un aperçu général sur les groupes et les monoïdes finis. On définit quelques notions de base : l'homomorphisme, la relation de congruence et le groupe de permutation, ces notions sont utilisées dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre on étudie les semi-groupes de transformation et les semi-automates, on divise ce chapitre en deux parties, la première partie est consacrée à l'étude de semi-groupe de transformation, le monoïde de transformation, groupe de transformation, et la deuxième partie pour les automates et les semi-automates.

Nous exposerons dans le troisième chapitre, la relation entre le semi-groupe et le semi-automate, on définit dans ce chapitre le semi-groupe d'un semi-automate, semi-groupe de transformation d'un semi-automate, monoïde d'un semi-automate, monoïde de transformation d'un semi-automate, et semi-automate de semi-groupe de transformation, avec quelques exemples pour expliquer ces notions.

## Notations générales

$\Sigma$	L'ensemble alphabet.
$\Sigma^*$	L'ensemble des mots sur $\Sigma$ .
$\mathbf{End}(A)$	L'ensemble de tous les endomorphismes sur $A$ .
$PF(Q)$	Le monoïde de toutes les fonctions définis de $Q$ dans $Q$
$X = (Q, S)$	Le semi-groupe de transformation.
$\mathbf{S}(M)$	Le semi-groupe d'un semi-automate.
$\mathbf{M}(M)$	Le monoïde de semi-automate.
$\mathbf{TS}(M)$	Le semi-groupe de transformation d'un semi-automate.
$\mathbf{TM}(M)$	Le monoïde de transformation de semi-automate.
$\mathbf{SM}(X)$	Le semi-automate de semi-groupe de transformation.

# Chapitre 1

## Etude sur les groupes et les monoïdes finis

Ce chapitre est conçu comme une sorte de lexique dans lequel sont répertoriées les définitions de bases (groupe, sous groupe, monoïde, semi-automate...etc.), utilisé tout au long de ce mémoire et quelques exemples pour comprendre ces notions.

### 1.1 Relation binaire, n-aire

**Définition 1.1.** Une relation binaire entre deux ensembles  $A$  et  $B$  est une partie  $\mathfrak{R}$  du produit cartésien  $A \times B$ .

Une relation  $n$ -aire entre  $n$  ensembles  $A_1, A_2, \dots, A_n$  est une partie  $\mathfrak{R}$  du produit cartésien  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ .

Une relation *diagonale* ou (relation identité sur  $A$ ) est définie par

$$I_A = \{(x, x) / x \in A\}$$

- Une relation  $\mathfrak{R}$  est *injective* si et seulement si

$$\text{pour tout } x, x' \in A, \text{ pour tout } y \in B \quad x\mathfrak{R}y \text{ et } x'\mathfrak{R}y \implies x = x'.$$

- Une relation  $\mathfrak{R}$  est *surjective* si et seulement si

$$\text{pour tout } y \in B, \text{ il existe } x \in A \text{ tel que } x\mathfrak{R}y.$$

On dit que  $\mathfrak{R}$  est une *fonction*, si l'image de  $x$  par  $\mathfrak{R}$  est un ensemble à zéro ou un élément.

Toujours, si  $\mathfrak{R}$  est une fonction, on note

$$\mathfrak{R} : A \longrightarrow B.$$

- Une relation  $\mathfrak{R} \subseteq A \times B$  est une *application* de  $A$  dans  $B$  si à tout élément de  $A$  est associé un élément de  $B$ .

- Si  $\mathfrak{R} \subseteq A \times B$  et si  $S \subseteq B \times C$  sont des relations, on définit la *composition*  $\mathfrak{R} \circ S$  de ces deux relations par :

$$\mathfrak{R} \circ S = \{(x, z) \in A \times C / \text{il existe } y \in B \text{ tel que } (x, y) \in \mathfrak{R} \text{ et } (y, z) \in S\}.$$

- Une relation  $\mathfrak{R}$  est une relation *d'équivalence* si elle vérifie les trois conditions suivantes :

1. (*Réflexivité*)  $\forall a \in A : (a, a) \in \mathfrak{R},$
2. (*Symétrie*)  $\forall a, a' \in A : (a, a') \in \mathfrak{R} \implies (a', a) \in \mathfrak{R},$
3. (*Transitivité*)  $\forall a, a', a'' \in A : (a, a') \in \mathfrak{R} \text{ et } (a', a'') \in \mathfrak{R} \implies (a, a'') \in \mathfrak{R}.$

- Soit  $\mathfrak{R}$  une relation d'équivalence sur  $A$ , pour tout  $a \in A$ , on définit

$$[a]_{\mathfrak{R}} = \{a' \in A / (a, a') \in \mathfrak{R}\}.$$

Donc  $[a]_{\mathfrak{R}}$  est une partie de  $A$ , il est appelé *classe d'équivalence* de  $a$ .

L'ensemble *quotient* de  $A$  est l'ensemble des toutes les classes d'équivalence de  $A$ , notée par  $A/\mathfrak{R}$ .

## 1.2 Semi-groupe

**Définition 1.2.** Soit  $S$  un ensemble et  $\bullet : S \times S \longrightarrow S$  une opération binaire interne et partout définie. L'ensemble  $S$  muni de l'opération  $\bullet$  possède une structure de *semi-groupe* si l'opération  $\bullet$  est associative :

$$\text{pour tous } x, y, z \in S : (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z).$$

- Soit  $S'$  est une partie de  $S$  tel que

$$\text{pour tout } a, b \in S' : a \bullet b \in S'$$

donc  $S'$  est un *sous semi-groupe* de  $S$ .

### Exemple 1.3.

1. L'ensemble des nombres naturels muni de l'addition  $(\mathbb{N}_+, +)$ , ou multiplication  $(\mathbb{N}, \times)$ , sont des semi-groupes.

2.  $(\mathbb{R}, \max)$  tel que :  $x(\max)y := \max(x, y)$  est un semi-groupe sur l'ensemble  $\mathbb{R}$ .

## 1.3 Monoïde

**Définition 1.4.** Un monoïde  $(M, \bullet)$  est un semi-groupe qui admet un élément neutre  $e \in M$  tel que :

$$\text{pour tout } x \in M : x \bullet e = e \bullet x = x.$$

Si pour tout  $s, t \in M$   $s \bullet t = t \bullet s$ , on dit que  $M$  est *commutatif*.

**Remarque 1.5.** L'élément neutre  $e$  de  $M$  est unique.

**Exemples 1.6.**

1. Le semi-groupe  $(\mathbb{N}_+, +)$  d'élément neutre 0 est un monoïde.
2. Le semi-groupe  $(\mathbb{N}, \times)$  d'élément neutre 1 est un monoïde.
3. L'ensemble des parties d'un ensemble  $E$ , muni de l'union d'ensembles, est un monoïde, dont l'ensemble vide est l'élément neutre. Le même ensemble muni de l'intersection d'ensembles est aussi un monoïde, dont l'ensemble vide est l'élément neutre.

**Définition 1.7.** Un alphabet est un ensemble fini. Un alphabet sera en général désigné par une lettre grecque majuscule ainsi :

$$\Sigma = \{a, b, c\}; \quad \Gamma = \{\rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\}; \quad \Phi = \{0, 1\}$$

sont des alphabets. Les éléments d'un alphabet sont appelés lettres ou symboles. Un mot sur  $\Sigma$  est une suite finie (et ordonnée) de symboles. On appellera la longueur d'un mot le nombre de caractères qu'il contient. Si un mot est dénoté par  $u$ , sa longueur sera dénotée par  $|u|$ .

L'unique mot de longueur 0 est le mot correspondant à la suite vide. Ce mot s'appelle le mot vide et on le note  $\varepsilon$ .



**Définition 1.8.** Soit un alphabet  $\Sigma$ , on définit l'opération de concaténation sur  $\Sigma^*$  de la façon suivante :

Pour tous mots  $u = u_1...u_k$  et  $v = v_1...v_l \in \Sigma$ , la concaténation de  $u$  et  $v$ , notée  $u.v$  ou simplement  $uv$ , est le mot

$$w = w_1...w_{k+l} \quad \text{où} \quad \begin{cases} w_i = u_i, 1 \leq i \leq k \\ w_{k+i} = v_i, 1 \leq i \leq l \end{cases}$$

Ainsi,  $\Sigma^*$  (L'ensemble des mots sur  $\Sigma$ ) muni de l'opération de concaténation est un monoïde de neutre  $\varepsilon$ .

## 1.4 Homomorphisme

**Définition 1.9.** On appelle structure algébrique tous ensemble ou famille d'ensemble muni d'une ou plusieurs lois de composition.

On appelle *homomorphisme* de la structure algébrique  $(A, S_1, S_2, \dots)$  sur la structure algébrique  $(B, T_1, T_2, \dots)$  toute application  $f : A \longrightarrow B$  qui vérifie la formule suivante

$$\forall x, y \in A \quad f(xS_iy) = f(x)T_if(y) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots$$

Abrégeant : l'image du composé est égale au composé des images, ou bien l'application  $f$  préserve les lois.

- Un homomorphisme  $f : A \longrightarrow A$  est un endomorphisme de  $A$ .
- L'ensemble de tous les endomorphismes sur  $A$  est noté par **End**( $A$ ).

**Exemples 1.10.**

L'application  $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $f(x) = \text{Log} x$  vérifie bien la formule  $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$   $f(xy) = f(x) + f(y)$ , donc  $f$  est un homomorphisme de la structure algébrique  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  sur la structure  $(\mathbb{R}, +)$ .

**Définition 1.11.** Soient  $(A, \triangleleft)$  et  $(B, \circ)$  deux monoïdes de neutre respectif  $e_A$  et  $e_B$ . Une application  $f : A \longrightarrow B$  est un morphisme (ou encore homomorphisme) de monoïdes si

1. pour tout  $x, y \in A : f(x \triangleleft y) = f(x) \circ f(y)$ .
2.  $f(e_A) = e_B$ .

**Exemples 1.12.**

L'application longueur  $|\cdot| : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ , est un morphisme de monoïdes entre  $(\Sigma^*, \cdot)$  et  $(\mathbb{N}, +)$ . En effet,

$$\forall u, v \in \Sigma^* : |uv| = |u| + |v|$$

et  $|\varepsilon| = 0$ .

## 1.5 Relation de congruence

**Définition 1.13.** Une congruence est une relation d'équivalence qui préserve les opérations de la structure algébrique considérée.

**Exemples 1.14.**

Soient  $S$  et  $T$  deux semi-groupes,  $f : (S, \cdot) \longrightarrow (T, *)$  est un homomorphisme, on définit la relation  $\sim$  sur  $S$  par

$$\text{pour tout } a, b \in S : a \sim b \iff f(a) = f(b)$$

Il est clair que  $\sim$  est une relation d'équivalence dans  $S$ , et aussi vérifie la propriété

$$\text{si } a, b \in S, a \sim b \text{ et } s \in S \text{ alors } a \cdot s \sim b \cdot s \text{ et } s \cdot a \sim s \cdot b$$

en effet,

$$\begin{aligned} f(a \cdot s) &= f(a) * f(s) \\ &= f(b) * f(s) \\ &= f(b \cdot s) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Cette relation est appelé *relation de congruence* dans  $S$  définie par  $f$ .

## 1.6 Groupes

**Définition 1.18.** Soit  $(G, \bullet)$  un monoïde de l'élément neutre  $e$ , qui est tel que tout élément  $g$  de  $G$  possède un élément inverse  $g^{-1}$ , (i.e., pour tout  $g \in G$ , il existe  $g^{-1} \in G$  :  $g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = e$ ) est un *groupe*.

**Remarque 1.19.** Tout groupe est un monoïde, mais l'inverse n'est pas toujours vrai. Par exemple  $(\mathbb{N}, +)$  est un monoïde qui n'est pas un groupe.

**Exemples 1.20.** L'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels, celui  $\mathbb{R}$  des nombres réels, celui  $\mathbb{C}$  des nombres complexe, tous munis de l'addition, sont des groupes.

**Propriétés :**

(1) Un groupe  $G$  est dit *commutatif* ou *abélien*, si pour tout  $a$  et  $b$  deux éléments de  $G$  on a  $ab = ba$ .

- (2) On appelle ordre d'un groupe le nombre de ses éléments, un groupe d'ordre fini est dit *groupe fini*, un groupe d'ordre infini est dit *groupe infini*.
- (3) Un *sous groupe* de  $G$  est un sous monoïde  $H \subseteq G$  tel que

$$\text{pour tout } h, h_1 \in H : hh_1^{-1} \in H$$

- (4) On appelle sous groupe engendré par une partie  $A$  de  $G$  le plus petit sous groupe de  $G$  qui contient  $A$
- (5) Les sous groupes triviaux du groupe  $G$  sont  $\{e\}$  et  $G$ . Les autres sous-groupes non-triviaux sont appelées sous-groupes *propres*.
- (6) Un *groupe monogène* est un groupe engendré par un seul élément. Un groupe monogène fini est appelé un *groupe cyclique*.

- (7) Un sous groupe  $H$  de  $G$  est *normale* (ou *distingué*, *invariant*) dans  $G$  si

$$\text{pour tout } g \in G : gH = Hg$$

on écrit alors  $H \triangleleft G$ . Bien sûr, dans un groupe abélien, tous les sous-groupes sont invariants.

- (8) Un groupe est dit *simple* s'il ne possède pas de sous groupe normale (autre que  $\{e\}$  et  $G$  lui-même).
- (9) On appelle sous-groupe *maximal* d'un groupe  $G$  tout élément maximal de l'ensemble des sous-groupes propres de  $G$ .

## 1.7 Groupe de permutations

**Définition 1.21.** Soit  $S$  un ensemble, l'ensemble  $\mathcal{P}(S)$  des applications bijectives ou permutation de  $S$  dans lui-même est un groupe pour la composition des applications. La loi est interne car la composée de deux bijections est une bijection et elle est associative car la composition des applications l'est aussi.

L'élément neutre est une application identité de  $S$ , notée  $Id_S$  définie par  $Id_S(x) = x$  pour tout  $x \in S$ . L'inverse est l'application réciproque.

**Exemple 1.22.** (*Groupes symétriques*)

Notons  $[n]$  l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , et notons  $\delta_n$  son groupe de permutation. Dans ce cas on parlera aussi de substitution. On l'appelle *le groupe symétrique* de l'ensemble à  $n$  éléments.

## 1.8 Action d'un groupe sur un ensemble

**Définition 1.23.** Soient  $G$  un groupe et  $X$  un ensemble. Une *action* (à gauche) de  $G$  sur  $X$  est une application

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- Pour tout  $x \in X$ , on a  $e \cdot x = x$ ,  $e$  l'élément neutre de  $G$ .
- Pour tout  $x \in X$  et tout  $(g, h) \in G \times G$ , on a  $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$ .

# Chapitre 2

## Semi-groupe de transformation et semi-automate

Dans ce chapitre, on présente les concepts de semi-groupe de transformation, monoïde de transformation, et enfin groupe de transformation et semi-automate.

### 2.1 Semi-groupe de transformation

**Définition 2.1.** Soit l'ensemble fini  $Q$ , on note par  $PF(Q)$  le monoïde de toutes les fonctions  $Q \longrightarrow Q$  muni de la composition des fonctions comme opération. La transformation identité  $1_Q$  est l'élément unité de ce monoïde.

Soit la fonction vide  $\theta : Q \longrightarrow Q$  avec  $\forall s \in PF(Q) \quad \theta s = \theta = s\theta$ , cette fonction  $\theta \in PF(Q)$ .

Un *semi-groupe de transformation* est le couple :

$$X = (Q, S)$$

Avec  $Q$  un ensemble fini  $Q$  et  $S$  un sous semi-groupe du monoïde  $PF(Q)$ .

Les éléments de  $Q$  sont appelés *états*, et  $Q$  lui-même appelé l'ensemble *fondamentale*.  
Les éléments de  $S$  sont appelés *transformations de  $X$*  et  $S$  lui-même est appelé le *semi-groupe d'actions de  $X$* .

Nous pouvons donner une fonction  $\alpha$  (appelé l'action) définit par

$$\alpha : Q \times S \longrightarrow Q$$

et qui satisfait les conditions suivantes :

- 1) :  $\alpha(\alpha(q, s), s') = \alpha(q, ss')$
- 2) :  $\exists q \in Q \ s \neq s' \implies \alpha(q, s) \neq \alpha(q, s')$

Nous écrivons généralement  $qs$  au lieu de  $\alpha(q, s)$ .

Les conditions (1) et (2) prennent alors les formes plus faciles (1') et (2')

- 1') :  $(qs)s' = q(ss')$
- 2') :  $\exists q \in Q \ s \neq s' \implies qs \neq qs'$

La condition (1') est appelée la *condition d'associativité* et la condition (2') est appelée la *condition fidélité*.

### Exemples 2.2.

(1) Pour tous ensemble (fini)  $Q$ , le pair  $(Q, \emptyset)$  est un semi-groupe de transformation notée par  $Q$ .

(2) Pour chaque entier  $k \geq 0$ , on note par  $\mathbf{k}$  l'ensemble  $\mathbf{k} = \{0, \dots, k-1\}$  des chiffres à la base  $k$ .

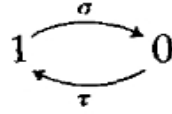
En particulier  $\mathbf{0}$  est l'ensemble vide,  $\mathbf{1}$  a un élément unique 0 et  $\mathbf{2}$  comprend les chiffres 0 et 1. Comme expliqué ci-dessus, nous considérons  $\mathbf{k}$  comme un semi-groupe de transformation avec un semigroupe vide d'action. En particulier  $\mathbf{0}$  est le plus petit semi-groupe de transformation.

(3) Un semi-groupe de transformation  $E$  est donné par

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{0}$$

Avec  $Q_E = \mathbf{2}$  l'ensemble de ses états, avec  $S_E$  l'ensemble de ses transformations  $\sigma$  et  $\theta = \sigma^2$ .

(4) Le semi-groupe de transformation  $F$  est donné par



ici,  $Q_F = \mathbf{2}$  et  $S_F$  avec les transformations  $\sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma, \theta = \sigma^2 = \tau^2$  est donné par les formules suivantes :

$$\sigma \begin{cases} 0\sigma = \emptyset \\ 1\sigma = 0. \end{cases}$$

$$\tau \begin{cases} 0\tau = 1 \\ 1\tau = \emptyset. \end{cases}$$

$$\sigma\tau \begin{cases} 0\sigma\tau = (0\sigma)\tau = \emptyset\tau = \emptyset \\ 1\sigma\tau = (1\sigma)\tau = 0\tau = 1 \end{cases}$$



$$\tau\sigma \left\{ \begin{array}{l} 0\tau\sigma = (0\tau)\sigma = 1\sigma = 0 \\ 1\tau\sigma = (1\tau)\sigma = \emptyset\sigma = \emptyset \end{array} \right.$$

$$\sigma^2 \left\{ \begin{array}{l} 0\sigma^2 = (0\sigma)\sigma = \emptyset\sigma = \emptyset \\ 1\sigma^2 = (1\sigma)\sigma = 0\sigma = \emptyset \end{array} \right.$$

$$\tau^2 \left\{ \begin{array}{l} 0\tau^2 = (0\tau)\tau = 1\tau = \emptyset \\ 1\tau^2 = (1\tau)\tau = \emptyset\tau = \emptyset \end{array} \right.$$

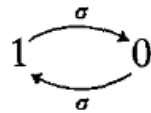
L'autre états est inclus dans les état précédente par exemple :

$$\sigma\tau\sigma \left\{ \begin{array}{l} 0\sigma\tau\sigma = (0\sigma)\tau\sigma = \emptyset\tau\sigma = \emptyset \\ 1\sigma\tau\sigma = (1\sigma)\tau\sigma = 0\tau\sigma = (0\tau)\sigma = 1\sigma = 0 \end{array} \right\} = \sigma \text{ etc.}$$

On peut représentant ces formules par le tableau suivant :

	0	1
$\sigma$	$\emptyset$	0
$\tau$	1	$\emptyset$
$\sigma\tau$	$\emptyset$	1
$\tau\sigma$	0	$\emptyset$
$\sigma^2$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\tau^2$	$\emptyset$	$\emptyset$

(5) Le semi-groupe de transformation  $Z_2$  est donné par



ses transformations sont  $\sigma$  et  $\sigma^2 = 1$ .

(6) Un semi-groupe de transformation  $C$  est donné par

$$1 \xrightarrow{\sigma} 0 \quad \begin{array}{c} \circlearrowright \sigma \end{array}$$

Il n'existe qu'une seule transformation  $\sigma$  avec  $\sigma^2 = \sigma$ .

(7) Le semi-groupe de transformation  $\bar{2}$  est donné par

$$\tau \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft \end{array} 1 \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma} \\ \xleftarrow{\tau} \end{array} 0 \quad \begin{array}{c} \circlearrowright \sigma \end{array}$$

Clairement  $\sigma = \sigma^2 = \tau\sigma$ , et  $\tau = \tau^2 = \sigma\tau$ .

### 2.1.1 Monoïde de transformation

**Définition 2.3.** Le semi-groupe de transformation  $X = (Q, S)$  est appelé *monoïde de transformation* si la transformation d'identité  $1_Q$  est dans  $S$ , donc dans ce cas  $S$  est un sous monoïde.

Avec chaque semi-groupe de transformation  $X = (Q, S)$  on peut associer le monoïde de transformation  $X^* = (Q, S \cup 1_Q)$ .

#### Exemples 2.4.

(1)  $0^* = (0, \theta)$  est le plus petit monoïde de transformation.

(2) Avec chaque semi-groupe de transformation  $X = (Q, S)$  on peut associer le monoïde de transformation  $X^* = (Q, S \cup 1_Q)$ , donc tous les semi-groupes de transformations de l'exemple précédent sont des monoïdes de transformations si on ajoute  $1_Q$  au sous semi-groupe  $S$ .

### 2.1.2 Semi-groupe de transformation complete

**Définition 2.5.** Un semi-groupe de transformation  $X = (Q, S)$  est dit *complete* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (1)  $Q \neq \emptyset$
- (2)  $\forall q \in Q, s \in S$  on a  $qs \neq \emptyset$ .

Avec chaque semi-groupe de transformation, nous associons un semi-groupe de transformation complete noté  $X^c$ , qui est défini comme suit :

$X^c = (Q^c, S)$  avec  $Q^c = Q \cup \{p\}$  pour certain  $p \notin Q$  et

$$q \cdot s = \begin{cases} qs & \text{si } q \in Q \text{ et } qs \neq \emptyset \\ p & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exemple 2.6.**

(1) Le semi-groupe de transformation  $E = (Q_E, S_E)$  avec  $Q_E = \mathbf{2}$ , et  $S_E = \{\sigma\}$  de l'exemple (2.2) n'est pas complete on lui ajoute l'état  $p$  et on obtient donc  $E^c$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\sigma} & 0 \\ & \swarrow_{\sigma} & \\ & p & \end{array}$$

$$E^c = (Q_E \cup \{p\}, S_E).$$

(2) Les semi-groupes de transformation  $Z_2$ ,  $C$ , et  $\bar{\mathbf{2}}$  sont complete.

(3) Le semi-groupe de transformation  $F = (\mathbf{2}, S_F)$  n'est pas complete on ajout l'état  $p$

et donc la completion de  $F$  est donnée par :

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{\sigma} & & \\ & 1 & \xleftrightarrow{\tau} & 0 & \\ & \downarrow & \swarrow & & \\ \sigma & & \tau & & \\ & p & & & \end{array}$$

### 2.1.3 Groupe de transformation

**Définition 2.7.** Un  $X = (Q, S)$  est appelé *groupe de transformation* si

- (1)  $Q \neq \emptyset$ ;
- (2)  $S$  est un groupe.

**Exemples 2.8.**

- (1) Pour tout  $k > 0$ , noté  $\mathbf{k}$  le groupe de transformation sauf  $\mathbf{0}$  n'est pas un groupe de transformation puis que  $\mathbf{0}$  est vide.
- (2) Le semi-groupe de transformation  $Z_2$  est un groupe de transformation.

**Définition 2.9.** Soient un ensemble fini  $Q$  et un élément  $q \in Q$ , on définit une application  $\bar{q} : Q \longrightarrow Q$  par

$$\text{pour tout } y \in Q : \bar{q}(y) = q.$$

Et  $\bar{q}$  est l'application constante définie par l'élément  $q$ .

L'ensemble de toutes les applications constantes sur  $Q$  génère un semi-groupe  $\bar{Q}$  comme sous semi-groupe de  $PF(Q)$ . Nous pouvons maintenant considérer le semi-groupe de transformation  $(Q, \bar{Q})$ .

Soit  $X = (Q, S)$  n'importe quel semi-groupe de transformation, on définit la *fermeture*  $\bar{X}$  de  $X$  pour être le semi-groupe de transformation  $(Q, \langle S \cup \bar{Q} \rangle)$ .

Nous appelons  $X$  *clôturé* si  $\bar{X} = X$ .

## 2.2 Automate et semi automate

### 2.2.1 Automate

**Définition 2.10.** Un *automate* fini est donnée d'un quintuple

$$A = (Q, I, F, \Sigma, \delta)$$

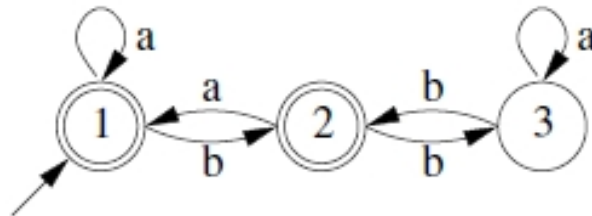
où

- $Q$  est un ensemble fini dont les éléments sont les états de  $A$ ,
- $I \subseteq Q$  désigne l'ensemble des états initiales,
- $F \subset Q$  désigne l'ensemble des états finals,
- $\Sigma$  est l'alphabet de l'automate,
- $\delta : Q \longrightarrow Q$  est la fonction de transition de  $A$ .

**Exemple 2.11.** L'automate  $A = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$  où  $Q = \{1, 2, 3\}$ ,  $q_0 = 1$ ,  
 $F = \{1, 2\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$  où la fonction de transition est donnée par

$\delta$	$a$	$b$
1	1	2
2	1	3
3	3	2

est représenté à la figure suivante :



**Figure 2.1.** L'automate  $A$

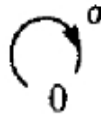
### 2.2.2 Semi-automate

**Définition 2.12.** Un semi-automate est un triple  $M = (Q, \Sigma, F)$ , où  $\Sigma$  et  $Q$  des ensembles finis et  $F$  est une fonction

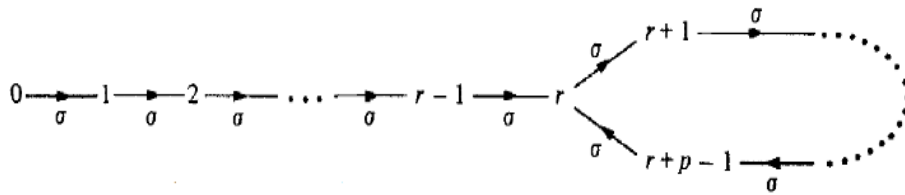
$$F : Q \times \Sigma \longrightarrow Q.$$

#### Exemples 2.13.

(1) Quelques cas simples sont  $Q$  et  $\Sigma$  sont les deux singletons, soient  $Q = \{0\}$  et  $\Sigma = \{\sigma\}$ , avec  $F : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$  défini par  $F(0, \sigma) = 0$ . Ce semi-automate est représenté par le diagramme simple



(2) On présentera un semi-automate cyclique comme suit, soient  $p, r$  des entiers positifs et on pose  $Q = \{0, 1, 2, \dots, r + p - 1\}$ ,  $\Sigma = \{\sigma\}$ . On considère le diagramme suivant



**Figure 2.2.** Semi-automate cyclique

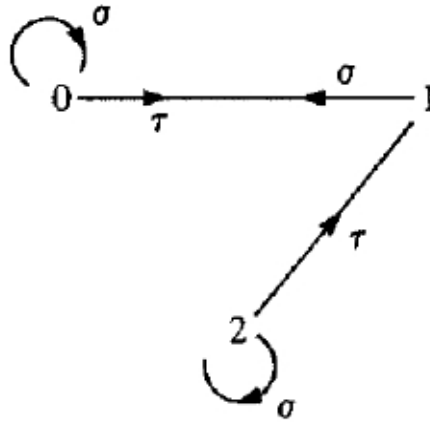
Donc  $F(0, \sigma) = 1$ ,  $F(1, \sigma) = 2$  etc.

(3) Soit  $M = (Q, \Sigma, F)$  est un semi-automate avec  $Q = \{0, 1, 2\}$ ,  $\Sigma = \{\sigma, \tau\}$  et  $F$  est donnée par

$F$	$\sigma$	$\tau$
0	0	1
1	0	$\emptyset$
2	2	1

Ici,  $F(1, \tau)$  est non défini, nous écrivons  $\emptyset$  dans la table.

Cet semi-automate est représenté par le diagramme suivant :



**Figure 2.3.** semi-automate  $M$

A chaque semi-automate incomplète  $M = (Q, \Sigma, F)$ , on définit la complétion de  $M$  par  $M^c = (Q', \Sigma, F')$  avec  $Q' = Q \cup \{z\}$

où  $z \notin Q$ , et

$$F'(q', \sigma) = \begin{cases} F(q, \sigma) & \text{si } q \in Q \text{ et } F(q, \sigma) \text{ est défini} \\ z & \text{sinon} \end{cases}$$

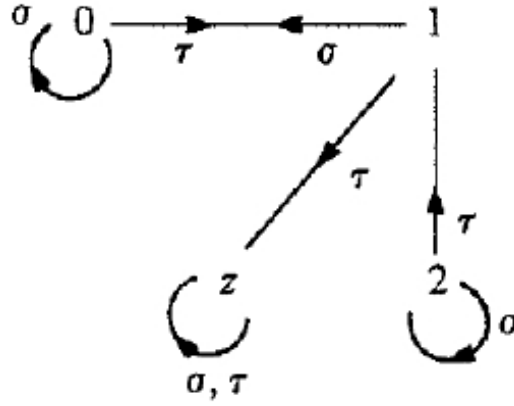
Le nouvel état  $z$  s'appelle l'état puit.

**Exemples 2.14.**

Le complétion de  $M = (Q, \Sigma, F)$  dans l'exemple (2.13.3) est  $M^c = (Q', \Sigma, F')$  avec  $Q' = \{0, 1, 2, z\}$ ,  $\Sigma = \{\sigma, \tau\}$  où  $F'$  est donnée par

$F$	$\sigma$	$\tau$
0	0	1
1	0	$z$
2	2	1

$M^c$  est représenté par le diagramme suivant



**Figure 2.3.** semi-automate  $M^c$

**Remarque 2.15.** Si  $\alpha = \alpha_1\alpha_2...\alpha_k$  ( $\alpha \in \Sigma$ ), alors on définit

$$F_\alpha : Q \longrightarrow Q$$

par

$$qF_\alpha = qF_{\alpha_1}F_{\alpha_2}...F_{\alpha_k}$$



# Chapitre 3

## La relation entre semi-groupe et semi-automate

Dans ce chapitre on étudie la relation entre semi-groupe de transformation et semi-automate, pour ce la on définit le semi-groupe de transformation du semi-automate, monoïde de transformation du semi-automate, et enfin semi-automate du semi-groupe de transformation.

### 3.1 Le semi-groupe d'un semi-automate

**Définition 3.1** Soient  $M = (Q, \Sigma, F)$  un semi-automate et  $\Sigma^+$  l'ensemble de tous les mots de longueur supérieur ou égal à 1 sur l'alphabet  $\Sigma$ . On définit une relation  $\sim$  sur  $\Sigma^+$  par

$$\alpha \sim \beta \iff F_\alpha = F_\beta \text{ tels que } \alpha, \beta \in \Sigma^+$$

avec  $F_\alpha : Q \longrightarrow Q$  défini par  $qF_\alpha = F(q, \alpha)$  pour chaque  $q \in Q$ , et  $F_\beta : Q \longrightarrow Q$  défini par  $qF_\beta = F(q, \beta)$ . Il est clair que " $\sim$ " est une relation d'équivalence. Et puisque  $\Sigma^+$  possède une structure de semi-groupe avec la concaténation des mots comme opération,

la relation  $\sim$  est une congruence sur  $\Sigma^+$ . En effet, si  $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma^+$  et  $\alpha \sim \beta$ , alors  $F_\alpha = F_\beta$  et pour tout  $q$  dans  $Q$  on a :

$$qF_{\gamma\alpha} = qF_\gamma F_\alpha = (qF_\gamma)F_\alpha = (qF_\gamma)F_\beta = qF_{\gamma\beta}$$

et ainsi  $F_{\gamma\alpha} = F_{\gamma\beta}$  qui donne  $\gamma\alpha \sim \gamma\beta$ .

Maintenant, le semi-groupe quotient  $\Sigma^+ / \sim$  est appelé *le semi-groupe du semi-automate*, en notation  $\mathbf{S}(M)$ .

Les éléments de  $\mathbf{S}(M)$  seront les classes d'équivalence  $[\alpha]$ ,  $\alpha \in \Sigma^+$ .

Pour n'importe quelle semi-automate  $M = (Q, \Sigma, F)$  il y a un semi-groupe de transformation  $(Q, \mathbf{S}(M))$  noté  $\mathbf{TS}(M)$  et appelé *le semi-groupe de transformation du semi-automate*  $M$ .

### Exemple 3.2.

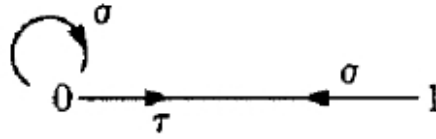
(1) Le semi-groupe de transformation du semi-automate (défini dans l'exemple (2.13.3)) est  $(\{0, 1, 2\}, \{\theta, \sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma, \sigma\tau\sigma\})$  avec son semi-groupe est donnée par le tableau suivant

	$\theta$	$\sigma$	$\tau$	$\sigma\tau$	$\tau\sigma$	$\sigma\tau\sigma$
$\theta$	$\theta$	$\theta$	$\theta$	$\theta$	$\theta$	$\theta$
$\sigma$	$\theta$	$\sigma$	$\sigma\tau$	$\sigma\tau$	$\sigma\tau\sigma$	$\sigma\tau\sigma$
$\tau$	$\theta$	$\tau\sigma$	$\theta$	$\tau$	$\theta$	$\tau\sigma$
$\sigma\tau$	$\theta$	$\sigma\tau\sigma$	$\theta$	$\sigma\tau$	$\theta$	$\sigma\tau\sigma$
$\tau\sigma$	$\theta$	$\tau\sigma$	$\tau$	$\tau$	$\tau\sigma$	$\tau\sigma$
$\sigma\tau\sigma$	$\theta$	$\sigma\tau\sigma$	$\sigma\tau$	$\sigma\tau$	$\sigma\tau\sigma$	$\sigma\tau\sigma$

(2) Soit le semi-automate  $M = (Q, \Sigma, F)$  telle que  $Q = \{0, 1\}$ ,  $\Sigma = \{\sigma, \tau\}$ , et  $F$  est donnée par

$F$	$\sigma$	$\tau$
0	0	1
1	0	$\emptyset$

est représenté par



le semi-groupe du semi-automate est donné par

	$\theta$	$\sigma$	$\tau$	$\sigma\tau$
$\theta$	$\theta$	$\theta$	$\theta$	$\theta$
$\sigma$	$\theta$	$\sigma$	$\sigma\tau$	$\sigma\tau$
$\tau$	$\theta$	$\theta$	$\theta$	$\sigma$
$\sigma\tau$	$\theta$	$\sigma$	$\theta$	$\tau$

donc  $S(M) = \{\theta, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$  et  $TS(M) = (\{0, 1\}, \{\theta, \sigma, \tau, \sigma\tau\})$

## 3.2 Le monoïde du semi-automate

**Définition 3.3.** Nous pouvons facilement construire le monoïde du semi-automate  $M$  pour ce la considérons le monoïde  $\Sigma^*$  de tous les mots dans  $\Sigma$ , qui contient le mot vide  $\varepsilon$ , et on prolonge la relation  $\sim$  sur  $\Sigma^*$  par

$$\alpha \sim \beta \iff F_\alpha = F_\beta \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \Sigma^*.$$

notant encore que  $\sim$  est une congruence.

On écrivons  $\Sigma^* / \sim$  comme  $\mathbf{M}(M)$ , et l'appelle *le monoïde du semi-automate*  $M$ .

Pour un semi-automate  $M = (Q, \Sigma, F)$  on définit *le monoïde de transformation du semi-automate*, noté  $\mathbf{TM}(M)$ , par  $(Q, \mathbf{M}(M))$ .

### 3.3 Le semi-automate du semi-groupe de transformation

Dans cette sous section on montre que chaque semi-groupe de transformation détermine aussi un semi-automate

**Définition 3.4.** Soit  $X = (Q, S)$  est un semi-groupe de transformation, on définit le semi-automate  $M = (Q, S, F)$  par

$$\begin{aligned} F : \quad Q \times S &\longrightarrow Q \\ (q, s) &\longrightarrow qs \end{aligned}$$

On dit que  $M = (Q, S, F)$  est *le semi-automate du semi-groupe de transformation*  $(Q, S)$  et note par  $\mathbf{SM}(X)$ .

**Exemple 3.5** On a le semi-groupe de transformation  $E = (Q_E, S_E)$  où  $F$  est donnée par

$F$	$\sigma$
0	$\emptyset$
1	0

est représenté à la figure suivante :

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{0}$$

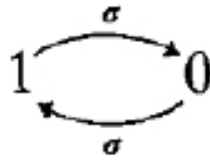
le semi-automate du semi-groupe de transformation  $E$  est  $SM(E) = (Q_E, S_E, F)$  avec  $F$  est définie par

$$F : Q_E \times S_E \longrightarrow Q_E$$

tel que  $\forall q \in Q, s \in S \quad F(q, s) = qs$  Donc  $SM(E)$  où  $F$  est donnée par

$F$	$\sigma$
0	1
1	0

est représenté à la figure suivante :



# Bibliographie

- [Alm94] J.ALMEIDA, *Finite semigroups and universal algebra*, world scinentific puplishing co.pte.ttd (1994)
- [AW] J.ALMEDA, P.WEIL, *Rree profinite semigroups over semi direct products*
- [Arb] M.A.ARBIB, *Algebraic theory of machines, languge, and semi groupes*
- [Aut94] J-M.AUTEBERT, *Théorie des langages et des automates*, Masson, Paris milan Berolonne(1994).
- [Del01] J.DELCOURK, *Théorie des groupes 2<sup>eme</sup> edition*, Dunod,Paris(2001-2007).
- [Eil76] S.EILENBERG, *Automata,Languages, and Machines*, Academic Press ,INC (1976).
- [FB95] R.FLOYED ET R.BIEGEL, *Le langage des machines*, internationale Thomson publishing, france Paris (1995).
- [Jac06] J.JACQUES RISEL PASCAL BOYER, *Algebre pour la licence 3*, Dunod, Paris(2006)
- [Hol82] W.M.HOLCOMBE, *Algebraic automata theory*, Cambridge University (1982).
- [Per96] D.PERRIM, *Cours d'algèbre, Ellipses edition markeking.S.A.(1996).*
- [Rig] M.RIGO, *Theorie des automates et langage formels*
- [Wol01] P.WOLPER, *Introduction à la calculabilité 3<sup>eme</sup> édition*, Dunod,Paris(2001-2006).
- [Zit93] M.ZITOUNI, *Algèbre, Office des publication universitaires, Alger(1993).*